

## UMA ALTERNATIVA PARA EVITAR O EFEITO *MACH BAND* EM RADIOSIDADE

RUI MANUEL RIBEIRO DE BASTOS<sup>1</sup>  
GLADIMIR VALÉRIO GUIMARÃES BARANOSKI<sup>2</sup>  
ANTÓNIO AUGUSTO DE SOUSA<sup>3</sup>  
FERNANDO NUNES FERREIRA<sup>4</sup>

INESC – Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores  
Largo Mompiller 22 – Apartado 4433  
4007 PORTO CODEX

<sup>2</sup>CPGCC - Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação  
Instituto de Informática  
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Caixa Postal 15064  
CEP 91501 - Porto Alegre - RS - BRASIL

<sup>1</sup>rmb@bruna.inescn.pt  
<sup>2</sup>gladimir@inf.ufrgs.br  
<sup>3</sup>aa.sousa@porto.inescn.pt  
<sup>4</sup>fnf@porto.inescn.pt

### Sumário

As técnicas de reconstrução de funções de iluminação, em geral, utilizam interpolação bilinear e, desta forma, apresentam problemas de *Mach band*. Embora a continuidade da intensidade de luz e de sua derivada entre *patches* vizinhos seja desejada, existem casos em que a descontinuidade é necessária. Cita-se a descontinuidade em intensidade nas regiões de sombra geradas por fontes pontuais e a descontinuidade de derivada na região de transição entre umbra e penumbra de sombras geradas por fontes de luz de área. Apresenta-se neste trabalho uma alternativa para evitar o efeito *Mach band* que permite reconstruções suaves das funções de iluminação considerando também os casos onde se deseja que não haja continuidade. A técnica desenvolvida baseia-se em interpolação bicúbica utilizando superfícies paramétricas de Hermite.

### Introdução

A síntese de imagens fotorrealísticas tem sido objectivo de muitas investigações em Computação Gráfica, onde se persegue um realismo visual ideal capaz de criar estímulos similares aos que

um observador teria ao visualizar a cena real [7]. Para isso, criam-se representações geométricas da cena tridimensional e utilizam-se técnicas de projecção e modelos de iluminação para determinar a função de iluminação em cada *pixel* das imagens da cena.

É facilmente verificável que a maior parte da luz que vemos em ambientes reais não provém directamente de fontes de luz, mas sim de múltiplas reflexões/transmissões especulares, difusas e/ou intermédias dessa luz. Actualmente, os métodos que melhor simulam esses efeitos são o *ray tracing*, para efeitos especulares, e a radiossidade, para efeitos difusos. Neste trabalho será dada ênfase a efeitos intrínsecos aos modelos de iluminação que visam reproduzir os efeitos difusos.

Uma forma de sombrear-se uma superfície é resolver a função de iluminação em cada *pixel* e exibir o resultado. Entretanto, para funções de iluminação que variam muito suavemente ao longo da superfície (de reflexão difusa), este método é demasiado caro sem necessidade. Para funções com variações muito suaves é mais eficiente amostrar a função de iluminação em alguns pontos ao longo da superfície e então reconstruir uma função suave entre esses pontos que aproxime a função original.

No contexto de radiossidade também se verifica este problema de reconstrução. Em geral, os algoritmos de radiossidade discretizam cada superfície (curva ou plana) de uma cena em uma malha de *patches* (planos ou não) [6] [1] [2] [3] e determinam os valores de radiossidade (função de iluminação) nos vértices dessa malha. Esses valores de radiossidade são então interpolados sobre os *patches* para aproximar a função de iluminação original.

A técnica mais simples de reconstrução é o *constant shading*, onde cada polígono/*patch* é pintado com uma única cor. Entretanto, esta aproximação introduz descontinuidades localizadas nas funções reconstruídas. A menos que todos os elementos poligonais sejam extremamente pequenos (menores do que um *pixel*), estas descontinuidades resultam numa aparência facetada.

Por esta razão, utiliza-se frequentemente um esquema de interpolação bilinear [8]. No entanto, a reconstrução bilinear ainda é propensa a alguns problemas censuráveis. Em particular, embora a interpolação bilinear possa garantir continuidade de intensidade nas fronteiras de *patches* vizinhos, também pode introduzir descontinuidades de derivada na função de iluminação reconstruída em regiões onde a função original seria suave e continuamente derivável. Estas descontinuidades aparecem como evidentes efeitos *Mach band* nas imagens geradas.

De modo a obter uma função de iluminação continuamente derivável devem ser utilizados esquemas de interpolação de ordem superior à linear. Encontram-se na bibliografia trabalhos que

utilizam interpolação quadrática, [5], [9] e [10], e trabalhos que utilizam interpolação cúbica, [12].

Neste trabalho é proposto um esquema de interpolação bicúbica baseado em superfícies paramétricas de Hermite.

### Funções de Iluminação e Funções de Reconstrução

Como existe um valor de iluminação para cada ponto de uma cena, pode associar-se uma função a cada cena e chamá-la de função de iluminação. Imagine-se, por exemplo, uma cena composta por uma parede iluminada por uma fonte de luz qualquer onde se quer conhecer o valor de iluminação em cada ponto dessa parede. Se for associado um espaço paramétrico  $(s, t)$  a essa parede, pode-se interpretar os valores de iluminação em cada ponto  $(s, t)$  como uma função de iluminação tridimensional  $f(s, t)$  (figura 1). Abstraindo que essa parede possa ser uma superfície qualquer

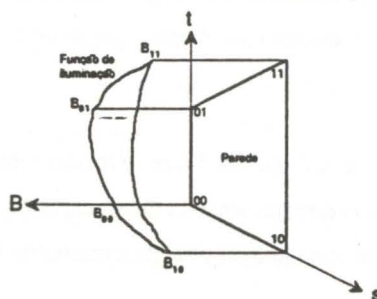


Figura 1: Função de iluminação em uma parede hipotética.

à qual foi associado um espaço paramétrico, pode-se entender a função de iluminação como uma descrição da iluminação dessa superfície a partir dos parâmetros  $s$  e  $t$ .

Como a determinação da função de iluminação de uma superfície envolveria o conhecimento do valor de iluminação em cada ponto dessa superfície, e esta seria uma tarefa, desnecessariamente, muito pesada para o caso de superfícies de reflexão difusa, opta-se, em geral, pela determinação da função de iluminação em alguns pontos sobre a superfície e a posterior utilização de uma função de reconstrução. Isto é, a utilização de uma função de interpolação que apresenta os mesmos valores da função de iluminação nos pontos onde esta foi calculada e apresenta uma aproximação razoável e coerente nas outras regiões da função original.

Deseja-se, também, que a função de reconstrução seja continuamente diferenciável ( $C^1$ ) nas regiões onde a função de iluminação também o seja. Em algumas situações, deseja-se que

haja apenas continuidade na intensidade de iluminação e não na sua derivada ( $C^0$ ) ou até mesmo descontinuidades de intensidade ( $C^{-1}$ ). Descontinuidades em intensidade verificam-se, por exemplo, em sombras geradas por fontes puntiformes de luz, bem como em regiões de contacto entre objectos com características diferentes de reflexão e/ou emissão de luz. Descontinuidades nas derivadas ocorrem, por exemplo, em sombras provocadas por fontes de luz de área nas fronteiras entre a umbra e a penumbra.

### Efeito *Mach band*

Ao aproximar-se uma superfície curva por uma malha de polígonos, se cada polígono for pintado com uma única cor, é facilmente verificável o aspecto facetado da imagem final. Efeito semelhante também se observa se for utilizada interpolação bilinear para pintar os polígonos, pois regiões adjacentes da imagem poderão apresentar descontinuidades nos valores de intensidade ou nos valores de suas derivadas ao longo de uma fronteira entre polígonos adjacentes. O simples refinamento da malha de polígonos não é eficiente, a menos que sempre se utilizem polígonos menores do que um *pixel*.

Este efeito de descontinuidade é chamado de *Mach band* e foi descoberto em 1865 pelo físico austríaco Ernst Mach [11]. O efeito depende directamente da distribuição de iluminação e exagera a variação de intensidade em qualquer aresta onde houver uma descontinuidade em magnitude ou em inclinação da intensidade (derivada):

na fronteira entre duas faces adjacentes, uma escura e outra clara, a escura parece mais escura e a clara parece mais clara (figura 2).

### Efeito *Mach band* em Radiosidade

A radiosidade,  $B$ , de uma superfície consiste, basicamente, na energia radiante luminosa que deixa essa superfície, composta pela luz emitida pela própria superfície e pela luz incidente refletida [4].

O método da radiosidade opera independentemente da posição do observador determinando em cada uma das superfícies a radiosidade correspondente. Uma vez determinados os valores das radiosidades, posiciona-se e orienta-se o observador e utiliza-se um algoritmo de remoção de elementos ocultos para exibir a imagem da cena.

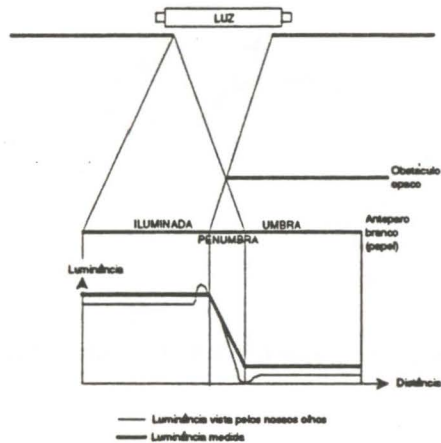


Figura 2: Efeito Mach band produzido por uma fonte linear de luz iluminando uma superfície branca e produzindo uma sombra com regiões de umbra e de penumbra.

Como já foi dito, em geral, os algoritmos de radiossidade discretizam cada superfície do ambiente a ser simulado em uma malha de *patches*, determinam os valores de radiossidade nos vértices dessa malha e interpolam esses valores sobre os *patches*. A utilização de interpolação bilinear, conforme se viu, é sujeita a efeitos *Mach band*.

Como alternativa para evitar o efeito *Mach band*, propõe-se a utilização de interpolação bicúbica. Cada *patch* deverá ter associado um espaço paramétrico  $(s, t)$  e associado a cada *patch* parametrizado existirá uma superfície paramétrica correspondente à sua função de reconstrução de iluminação. As superfícies paramétricas a serem utilizadas devem cumprir os requisitos das funções de reconstrução.

### Superfícies Paramétricas de Hermite

Entre as superfícies paramétricas bicúbicas escolheu-se a forma Hermite. No caso unidimensional, uma curva Hermite é definida por dois vértices e dois vectores tangentes. Os vértices definem os pontos inicial e final da curva e os vectores indicam a tangente à curva nos vértices inicial e final (figura 3).

No caso bidimensional, as superfícies bicúbicas paramétricas de Hermite são definidas por [7]:

$$B(s, t) = S \cdot M_H \cdot G_H \cdot M_H^T \cdot T^T \quad (1)$$

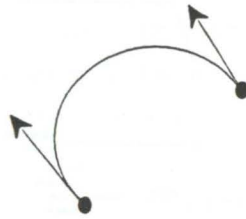


Figura 3: Curva Hermite com indicação dos vértices inicial e final e respectivos vectores tangentes.

onde:

$$S = [ s^3 \quad s^2 \quad s \quad 1 ] \quad (2)$$

$$T = [ t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 ] \quad (3)$$

$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G_H = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & \frac{\Delta B}{\Delta t} |_{00} & \frac{\Delta B}{\Delta t} |_{01} \\ B_{10} & B_{11} & \frac{\Delta B}{\Delta t} |_{10} & \frac{\Delta B}{\Delta t} |_{11} \\ \frac{\Delta B}{\Delta s} |_{00} & \frac{\Delta B}{\Delta s} |_{01} & \frac{\Delta^2 B}{\Delta s \Delta t} |_{00} & \frac{\Delta^2 B}{\Delta s \Delta t} |_{01} \\ \frac{\Delta B}{\Delta s} |_{10} & \frac{\Delta B}{\Delta s} |_{11} & \frac{\Delta^2 B}{\Delta s \Delta t} |_{10} & \frac{\Delta^2 B}{\Delta s \Delta t} |_{11} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$B_{st}$  serão os valores de radiosidade nos vértices do *patch* e  $\frac{\Delta B}{\Delta s}$ ,  $\frac{\Delta B}{\Delta t}$  e  $\frac{\Delta^2 B}{\Delta s \Delta t}$  serão os vectores tangentes às funções de reconstrução (figura 4).

No momento de gerar a imagem, em cada *pixel*, será conhecido o *patch* do ambiente que está sendo visível e os parâmetros  $s$  e  $t$  sobre esse *patch* que projectam-se sobre o *pixel*. Desta forma, conhecendo a superfície de Hermite (função de reconstrução) associada a cada *patch*, determina-se a interpolação bicúbica dos valores de radiosidade dos cantos do *patch* a partir da expressão (1).

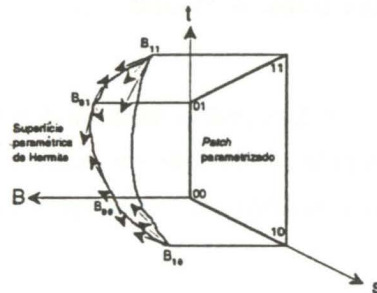


Figura 4: Superfície paramétrica bicúbica de Hermite associada a um patch qualquer.

### Continuidade de Derivada entre Funções de Reconstrução Independentes

Associou-se a cada *patch* uma superfície paramétrica de reconstrução. Para que haja continuidade de intensidade de iluminação e de sua derivada deve utilizar-se a informação de continuidade de vector normal entre *patches*.

Quando houver continuidade de vector normal em um vértice entre *patches*, nesse vértice assumir-se-á que também haverá continuidade de função de iluminação. Por consequência, nesse vértice, todas as funções de reconstrução que o compartilhem também compartilharão um plano comum tangente à função de iluminação nesse ponto (figura 5).

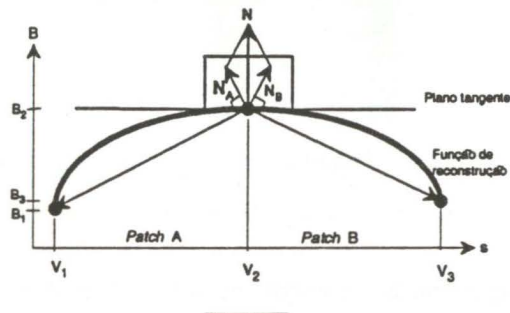


Figura 5: Determinação do plano tangente à função de reconstrução no vértice  $V_2$ .

Conhecido o vértice onde se deseja encontrar o plano tangente que garantirá continuidade da função de reconstrução, determina-se os vectores variação de radiosidade de todas as arestas que atingem esse vértice. Determinam-se então vectores normais a essas variações e ortogonais ao plano definido pelo espaço paramétrico  $s, t$ . O vector médio destes vectores normais é o vector normal ao plano tangente à função de reconstrução no vértice em questão (figura 5).

### Conclusões e Trabalhos Futuros

Como se pode observar nas figuras 6 e 7, os problemas de *Mach band* podem prejudicar consideravelmente as imagens que se obtêm a partir do método da radiosidade. Embora nos vértices se tenha valores bastante correctos de radiosidade, as funções de reconstrução inadequadas introduzem graves erros na iluminação.

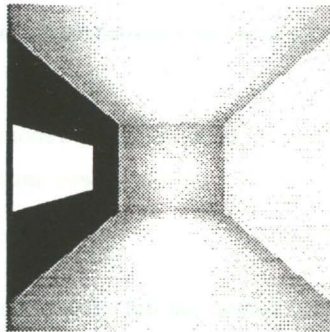


Figura 6: Cubo com fonte de luz de área simulado usando radiosidade. Vê-se o efeito *Mach band* em forma de cruz em todas as paredes excepto na que contém a fonte de luz.

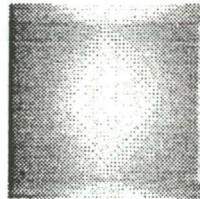


Figura 7: Fundo do cubo.

A técnica desenvolvida e apresentada tem por objectivo evitar o efeito de *Mach band* e, ao mesmo tempo, permitir que ainda sejam possíveis de representar as discontinuidades ocasionais, como foi mostrado. A implementação comprovará a eficácia do método desenvolvido e permitirá a comparação com outros métodos apresentados por outros autores.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] BARANOSKI, Gladimir V. Guimarães. *Aplicação de Radiosidade à Síntese de Imagens de Objetos Formados por Superfícies Curvas*. Porto Alegre, Brasil, Curso de Pós-Graduação em



- Ciência da Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Dissertação de mestrado, 1991.
- [2] BARANOSKI, Gladimir V. Guimarães. **Análise de Imagens Sintetizadas Aplicando Radiosidade em Conjunto com o Método do Diferencial Paramétrico.** In: IV Encontro Português de Computação Gráfica, Grupo Português de Computação Gráfica, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 4 a 6 de novembro de 1991.
- [3] BARANOSKI, Gladimir V. Guimarães. **The Parametric Differential Method: An Alternative to the Calculation of Form Factors.** Proceedings of EUROGRAPHICS'92, Computer Graphics Forum, v. 2, n. 3, Cambridge, UK, September 7-11, 1992.
- [4] BASTOS, Rui M. R. e FERREIRA, Fernando Nunes. **O Estado da Arte em Iluminação Global Utilizando Radiosidade.** Relatório Interno, INESC/Norte, Porto, 1992.
- [5] CENDES, Zoltan and WONG, Steven H.  **$C^1$  Quadratic Interpolation over Arbitrary Point Sets.** IEEE Computer Graphics and Application 7(11):8-16, 1987.
- [6] COHEN, Michael; GREENBERG, Donald P.; IMMEL, David S. and BROCK, Philip J. **An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis,** IEEE Computer Graphics and Applications, p.26-35, Mar. 1986.
- [7] FOLEY, J; van DAM, A.; FEINER, S.; HUGHES, J. **COMPUTER GRAPHICS principles and practice.** 2. ed. Reading: Addison Wesley, 1990. 1174p.
- [8] GOURAUD, Henri. **Continuous Shading of Curved Surfaces.** IEEE Transactions on Computers C-20(6):623-9, 1971.
- [9] POWELL, M. and SABIN, M. **Piecewise Quadratic Approximation on Triangles.** ACM Transactions on Mathematical Software, 316-25, 1977.
- [10] MAX, Nelson. **Smooth Appearance for Polygonal Surfaces.** The Visual Computer 5:160-73, 1989.
- [11] RATLIFF, F. **Contours and Contrast** Scientific American, 226(6):91-101, June 1972.
- [12] SALESIN, David; LISCHINSKI, Dani and DeROSE, Tony. **Reconstructing Illumination Functions with Selected Discontinuities.** 3rd EUROGRAPHICS Workshop on Rendering (Proceedings), 1992.



## De la simulation à la création

(Discours sur l'art dans un paysage technologique)

José Xavier

L'imagerie 3D du point de vue de création artistique est juste bonne à visualiser des boules de billard.

Là où certains voient l'urgence de nouveaux développements de plus en plus performants l'artiste créateur demande tout simplement une plus grande convivialité avec l'outil informatique.

A quoi servirait et comment mesurerait-on la pertinence d'un instrument dont le jeu deviendrait impossible tant sa complexité croissante le rendrait impraticable.

La question qui demande une prompt réponse dans les prochaines années est:

Le geste, l'attitude, la démarche artistique, créative, peut-elle s'accommoder d'outils conçus en dépit du bon sens par des apprentis sorciers?

## Ray tracing and radiosity methods for realistic rendering

Frederik W. Jansen  
Arjan J. F. Kok  
Delft University of Technology  
The Netherlands

*A combination of radiosity and ray tracing can provide an accurate method for assessing the global illumination in a scene. A source selection or classification can be applied to further improved the shadow accuracy. The source selection looks for important light sources that require separate shadow sampling. The cost for the additional shadow sampling can be reduced by exploiting shadow coherence and adaptive sampling techniques. Additional reduction in processing time can be achieved by parallel processing and dedicated VLSI hardware. With these techniques high-quality rendering can hopefully soon be brought within the realm of interactive visualization.*

Ray tracing [Whitted 1980] is a popular technique for realistic rendering, because it effectively models optical effects such as mirroring reflection, transparency and shadows. It does however not account for the indirect diffuse reflection between surfaces in a scene. This diffuse interreflection can only be sampled by casting additional shadow rays into all directions which unfortunately leads to an explosion of rays. Solutions proposed by Kajiya [1986], *path tracing* and *importance sampling*, and by Ward et al. [1988], *illuminance caching*, reduce the number of shadow rays but still require a large number of rays per pixel and the use of a large data structure.

Radiosity algorithms [Cohen and Greenberg 1985; Cohen et al. 1986] take a completely different approach in that they calculate the diffuse interreflection by determining the exchange of light between discrete patches in the scene. However, the radiosity preprocessing is not able to store the distribution of the specularly reflected light without using excessive data structures [Immel et al. 1986], and therefore the specular component of the light can not be represented during display.

Recent years have shown several attempts to integrate radiosity and ray tracing [Wallace et al. 1987, 1989; Sillion and Puech 1989; Heckbert 1990]. These approaches have continued to use the traditional radiosity approach in the sense that they include in the radiosity shading (calculated in the radiosity pass and stored with the patches) both the light that is received directly from the light sources and the light that is received by intermediate reflection from neighboring patches. Ray tracing only serves to add the specular component. The main problem of this approach is that the total radiosity often shows much variation over a patch. This is mainly due to the component of the light that is received directly from strong (point) light sources and is responsible for the sharp shadows. It is nearly impossible to represent these intensity variations accurately. The methods that have been proposed, such as patch refinement [Cohen et al. 1986], shadow meshes [Campbell and Fussell 1990], and illumination maps [Arvo 1986, Heckbert 1990], require large data structures and fail to provide the dynamic adaptation that is needed, for instance, when one zooms in on a single patch in a very large scene. Heckbert's [1990] suggestion to make the radiosity calculation viewpoint dependent by restricting it to those patches that are prominent in a given view, reduces the problem, but does not solve it.

Shirley [1990] has found a good synthesis for the different ray tracing and radiosity approaches. He calculates the *indirectly* received light for each patch in a radiosity preprocessing step and stores it as the radiosity shading with the patch. This shading is assumed to be almost constant over the patch, and therefore does not give the same resolution problems as the complete radiosity shading. *Directly* reflected light (from the main light sources and most radiant patches) is then calculated during the rendering pass by casting shadow rays as in the traditional ray tracing algorithm. Basically his method is the conventional ray tracing algorithm, except that instead of an ambient term a more accurate calculation is done for the indirect reflection.

Chen et al [1991] and Kok and Jansen [1991] have extended this approach by adding a source selection or classification process that separates those light sources and most radiant patches that will likely create sharp shadows and need to be sampled separately, from the minor light sources and other patches whose contribution can be incorporated in the preprocessed radiosity shading. The additional shadow testing, however, is still very expensive and shadow coherence [Kok et al 1991] and adaptive sampling techniques [Kok and Jansen, 1992] are needed to reduce the number of shadow rays.

Another way to reduce the rendering time is use of parallel processing, either by using clusters of workstations, multi-processor systems or by dedicated VLSI hardware. At Delft University of Technology, a VLSI project has been initiated to develop a so-called radiosity engine, a plug-in board with VLSI chips to enhance the ray intersection computation [Shen et al 1990].

## References

- Campbell, A.T., Fussell, D.S. (1990), Adaptive Mesh Generation for Global Diffuse Illumination, *Computer Graphics* 24(4): 155-164, Siggraph'90.
- Chen, S.E., Rushmeier, H., Miller, G., Turner, D. (1991), A Progressive Multi-Pass Method for Global Illumination, *Computer Graphics* 25(4): 165-174, Siggraph'91.
- Cohen, M.F., Greenberg, D.P. (1985), The Hemi-cube: A Radiosity Solution for Complex Environments, *Computer Graphics* 19(3): pp 31-40, Siggraph'85.
- Cohen, M.F., Greenberg, D.P., Immel, D.S., Brock, P.J. (1986), An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis, *IEEE Computer Graphics and Applications* 6(3): 26-35.
- Cohen, M.F., Cheng, S.E., Wallace, J.R., Greenberg, D.P. (1988), A Progressive Refinement Approach to Fast Radiosity Image Generation, *Computer Graphics* 22(4): 75-84, Siggraph'88.
- Heckbert, P.S. (1990), Adaptive Radiosity Textures for Bidirectional Ray Tracing, *Computer Graphics* 24(4): 145-154, Siggraph'90.
- Immel, D.S., Cohen, M.F., (1986), A Radiosity Method for Non-diffuse Environments, *Computer Graphics* 20(4):133-142, Siggraph'86.
- Kajiya, J.T. (1986), The Rendering Equation, *Computer Graphics* 20(4): 143-150, Siggraph'86.
- Kok, A.J.F., Jansen, F.W. (1991), Source Selection for the Direct Lighting Computation in Global Illumination, *Proceedings of the 2nd Eurographics Workshop on Rendering*. To be published by Springer Verlag.
- Kok, A.J.F., Jansen, F.W., Woodward, C. (1991), Efficient Complete Radiosity Ray Tracing Using a Shadow Coherence Method, Report of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics, nr. 91-63. Submitted for publication.
- Kok, A.J.F., Jansen, F.W. (1992), Adaptive sampling of area light sources in ray tracing including diffuse interreflection. *Computer Graphics Forum* 11(3): 289-298, *Proceedings Eurographics '92 Conference*.
- Rushmeier, H. (1988), *Realistic Image Synthesis for Scenes with Radiatively Participating Media*, PhD thesis, Cornell University, 1988.
- Shen, L., Deprettere, E., Dewilde, P. (1990) A New Space Partition Technique to Support a Highly Pipelined Parallel Architecture for the Radiosity Method, *Advances in Graphics Hardware V*, Springer Verlag, Eurographics Hardware Workshop 1990.
- Shirley, P. (1990) A Ray Tracing Method for Illumination Calculation in Diffuse Specular Scenes, *Proceedings Computer Graphics Interface '90*, pp 205-212.
- Sillion, F., Puech, C. (1989), A General Two Pass Method Integrating Specular and Diffuse Reflection, *Computer Graphics* 23(3): 335-344, Siggraph '89.
- Wallace, J.R., Cohen, M.F., Greenberg, D.P. (1987), A Two-Pass Solution to the Rendering Equation: A Synthesis of Ray Tracing and Radiosity Methods, *Computer Graphics* 21(4): 311-320, Siggraph'87.
- Wallace, J.R., Elmquist, K.A., Haines E.A. (1989), A Ray Tracing Algorithm for Progressive Radiosity, *Computer Graphics* 23(2):315-324, Siggraph'89.
- Ward, G.J., Rubinstein, F.M., Clear, R.D. (1988), A Ray Tracing Solution for Diffuse Interreflection, *Computer Graphics* 22(4): 85-92, Siggraph'88.
- Whitted, T. (1980), An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Communications of the ACM* 23(6): 343-349.

Address: Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Julianalaan 132, 2628 BL Delft, The Netherlands.  
Email: fwjlarjan@duticg.twi.tudelft.nl